数理解析研究所講究録
998 巻 1997 年 44-53

The Grothendieck-Teichmüller group and the adelic beta function

京大・数理研　伊原康隆
(Y. Ihara)

以前，G. Andersonは，有理数体$\mathbb{Q}$の絶対ガロア群$G_{\mathbb{Q}} = Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$の各元$\sigma$に対して超アデール・ベータ関数　$B_\sigma(s,t)$　$(s,t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$を定義し，その基本的諸性質を研究しました([A])。(これは筆者による，"universal ℓ-adic power series for Jacobi sums" $F_\sigma^{(\ell)}(u,v)$の一般化でもありました。)

今日の話は，$G_{\mathbb{Q}}$を含む群 GT = Grothendieck-Teichmüller 群の各元σに対してもベータ関数$B_\sigma(s,t)$を定義し，B_σ $(\sigma \in G_{\mathbb{Q}})$の主な性質のうちでどれが$\sigma \in GT$でも成立つかを論じるものです．

i) "Γ分解" は $\sigma \in GT$ でも成立つ．

ii) "Γの等分公式" は多分 $\sigma \in GT$, $\sigma \notin G_{\mathbb{Q}}$ では成立たないだろう，というのが現在得られている結果と推測です．(とくに，$G_{\mathbb{Q}} \subsetneq GT$ であるらしい．)

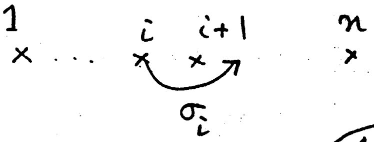
§1 まず記号.

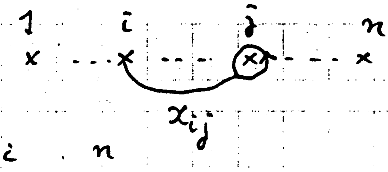
F_n : 階数 n の自由群 $(n \geq 1)$,

B_n : n 本糸の Artin braid 群 $= \langle \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1} \rangle$,

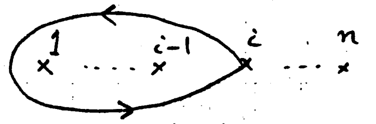
P_n : 同 pure braid 群 $= \langle x_{ij} \rangle_{1 \leq i < j \leq n}$,

ただし,





また



$y_i \ (2 \leq i \leq n)$

とおき, $\omega_n = y_2 \cdots y_n \in P_n$ とおく. $\langle \omega_n \rangle \cong \mathbb{Z}$ は B_n の中心である. また B_n, P_n の商群

$$B_n^* = B_n / \langle y_n, \omega_n \rangle , \quad P_n^* = P_n / \langle y_n, \omega_n \rangle$$

を考え, 一般に $b \in B_n$ の B_n^* における像を b^* とかく.

以下, $\wedge$ は profinite completion を表わす. 又一般に位相群 G の交換子群を G' で表わす. $G'' = (G')'$.

さて

$F_2 = \langle x, y \rangle$ とするとき, Grothendieck-Teichmüller 群 GT (cf. [D], [IK]) の定義は

$$GT = \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}\, \hat{F}_2 \ \middle| \ \begin{array}{l} \sigma x = x^{\lambda} \\ \sigma y = f^{-1} y^{\lambda} f \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists \lambda \in \hat{\mathbb{Z}}^{\times} \\ \exists f \in \hat{F}_2' \end{array}, \ (i)(ii)(iii) \right\}$$

ここで条件 (i)(ii)(iii) は,

(i) $f(x,y)f(y,x)=1$,

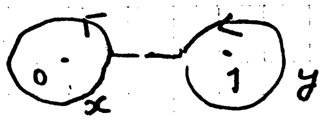
(ii) $f(z,x)z^m f(y,z)y^m f(x,y)x^m=1$ ただし $\begin{cases} m=\frac{1}{2}(\lambda-1), \\ xyz=1, \end{cases}$

(iii) $f(x_{12}^*,x_{23}^*)f(x_{34}^*,x_{45}^*)f(x_{51}^*,x_{12}^*)f(x_{23}^*,x_{34}^*)f(x_{45}^*,x_{51}^*)=1$

(P_5^* において).

GT は $\mathrm{Aut}\,\hat{F}_2$ の部分群をなし、$G_{\mathbb{Q}}$ の

$$\hat{F}_2=\pi_1(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}-\{0,1,\infty\};\ \overrightarrow{01})=\langle x,y\rangle$$



への作用によって、$G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow GT$

と埋めこまれることが知られている。

§2 GT は $\hat{F}_2$ に従って $\hat{F}_2'$, $\hat{F}_2''$, $\hat{F}_2'/\hat{F}_2''$ 等に作用する。GT, $G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathrm{Aut}(\hat{F}_2'/\hat{F}_2'')$ に於ける像を調べる。まず、

$$\hat{F}_2/\hat{F}_2'=\hat{\mathbb{Z}}\times\hat{\mathbb{Z}}$$

$\hat{F}_2'/\hat{F}_2''$ は、完備群環 $\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{F}_2/\hat{F}_2']]$ 上の加群としては、$\overline{(x,y)}=xyx^{-1}y^{-1} \pmod{\hat{F}_2''}$ で生成される階数 1 の自由加群であることが知られている。

次に、$\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^n]]$ の元は $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$ 上の $\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q}^{ab}$ 値をとる関数全体のつくる環 $\mathrm{Fct}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n,\hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q}_{ab})$ に、以下のように埋めこめる (cf.[A]). ここで $\mathbb{Q}_{ab}$ は $\mathbb{Q}$ の最大アーベル拡大(円分体), $n\geq 1$.

$$(*)\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[[\hat{\mathbb{Z}}^n]] & \xhookrightarrow[\text{subring}]{} & \mathrm{Fct}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n, \hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q}_{ab}). \\ \cup\!\!\!\!\!\!\quad \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ b & \longmapsto & B. \end{array}$$

$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$の任意の元$(s_1,\cdots,s_n)$をとり，$Ns_i=0\ (\forall i)$なる自然数$N$を選ぶ．
bの$\hat{\mathbb{Z}}[(\mathbb{Z}/N)^n]$に於る像を

$$b_N = \sum_{a\in(\mathbb{Z}/N)^n} c_a\cdot a \qquad (c_a\in\hat{\mathbb{Z}}) \quad a=(a_1,\cdots,a_n)$$

とするとき，Bを

$$B(s_1,\cdots,s_n) = \sum_a c_a\otimes\exp(2\pi i(a_1s_1+\cdots+a_ns_n)) \in \hat{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{Q}_{ab}$$

で定める．これによってうめ込み(*)が定まる．

さて次に定義する群Φは，実はGTを含んでいて，Φの元σは$\hat{F}_2/\hat{F}_2{}' = \hat{\mathbb{Z}}^2$に$\lambda$倍で作用する．（$\sim$は$\hat{F}_2$内の共役）

$$\Phi = \left\{\sigma\in\mathrm{Aut}\,\hat{F}_2 \;\middle|\; \begin{array}{l}\sigma x\sim x^\lambda \\ \sigma y\sim y^\lambda\end{array},\ \sigma z\sim z^\lambda \quad {}^\exists\lambda\in\hat{\mathbb{Z}}^\times\right\}$$

$$\begin{array}{l} \cup \\ GT \\ \cup \\ G_{\mathbb{Q}} \end{array} \qquad \begin{array}{l}\sigma.\overline{(x,y)} = B'_\sigma\overline{(x,y)} \quad (\hat{F}_2{}'/\hat{F}_2{}'' \text{で}) \\ B'_\sigma\in\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times,\end{array}$$

によってB'_σを定義し，更に

$$B'_\sigma = \frac{x^\lambda-1}{x-1}\cdot\frac{y^\lambda-1}{y-1}B_\sigma \quad \text{によって}\ B_\sigma\in\hat{\mathbb{Z}}[[\hat{\mathbb{Z}}^2]]^\times$$

を定め，$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$上の関数とみる．　このとき，

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \longrightarrow & \mathrm{Fct}\left((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2, \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}_{ab}\right) \\ \Psi & & \Psi \\ \sigma & \longrightarrow & B_\sigma \end{array}$$

は 1-cocycle になる. $B_{\sigma\tau}(s,t) = B_\sigma(s,t) B_\tau(\lambda_\sigma s, \lambda_\sigma t)$.

又 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ のとき $B_\sigma(s,t)$ は G-Anderson の定義した[A] hyper-adelic beta 関数 と一致する.

§3 (以下の Prop は GT の条件(i)(ii), Th は (iii) と, それぞれ, ほぼ対応する)

<u>Proposition</u> $\sigma \in GT$ とするとき,

(i) $B_\sigma(s,0) = B_\sigma(0,t) = 1 \otimes 1$,

(i)′ $B_\sigma(s,-s) = \lambda \otimes \dfrac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{e^{i\pi s\lambda} - e^{-i\pi s\lambda}}$; $\lambda = \lambda(\sigma)$, $s \neq 0$

(ii) $B_\sigma(s_1, s_2) = B_\sigma(s_2, s_1)$

(iii) $B_\sigma(s_1, s_2) B_\sigma(s_3, -s_3)$ は $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ の上で S_3-対称である.

主な結果:

<u>Theorem</u> $\sigma \in GT$ なら $B_\sigma(s_1, s_2) B_\sigma(s_1 + s_2, s_3)$ は S_3-対称.

(これは次とも同値である:

$B_\sigma(s_1, s_2) B_\sigma(s_3, s_4) B_\sigma(s_1 + s_2, s_3 + s_4)$ は $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 0$ の上で S_4-対称)

一方，$G_{\mathbb{Q}}$ の元に関しては更に，次の結果が知られている。

<u>**Theorem** (G.W. Anderson [A])</u>　$\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ なら

$$B_\sigma(s_1, s_2) = \frac{\Gamma_\sigma(s_1)\Gamma_\sigma(s_2)}{\Gamma_\sigma(s_1+s_2)}$$

($\Gamma_\sigma \in Fct(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}; \hat{W}\otimes\mathbb{Q}_{al})$，ただし $\hat{W} = \prod_p W(\bar{\mathbb{F}}_p)$，$W(\bar{\mathbb{F}}_p)$ は $\bar{\mathbb{F}}_p$ 上の Witt vectors の環) と分解し，更に等分公式

$$(*)\qquad \prod_{i \,(\mathrm{mod}\, N)} \Gamma_\sigma\left(\frac{s+i}{N}\right) = \Gamma_\sigma(s) \prod_{i\,(\mathrm{mod}\, N)} \Gamma_\sigma\left(\frac{i}{N}\right)\left(1\otimes \left(N^{-\langle s\rangle}\right)^{\sigma-1}\right)$$

が任意の自然数 N に対して成立つ。

このうちで，はじめの"Γ型分解"は前頁の定理の帰結で，従って $\sigma \in GT$ でも成立つ (Γ_σ のよい正規化は別問題として) が，後半の等分公式までもが ($M_{0,4} \hookrightarrow M_{0,5}$ と関連した幾何学的条件によって定義される群) GT の任意の元 σ に対して成立つと考えるのは無理がある。　又，ここでは述べないが，$\sigma \to B_\sigma$ の pro-ℓ 版における $G_{\mathbb{Q}}$ の像の研究 [Ic-K] と GT_ℓ 亜の場合の考察からも，多分 $G_{\mathbb{Q}} \subsetneqq GT$ であり，B_σ ($\sigma \in GT$, $\sigma \notin G_{\mathbb{Q}}$) は (*) を満たさないことが推測される

§4 定理の証明の概要

群 GT は $\hat{B}_n = \langle \sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1} \rangle$ に, $\sigma = (\lambda, f) \in GT$:

$$\sigma_1 \to \sigma_1^{\lambda}, \quad \sigma_i \to f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^{\lambda} f(y_i, \sigma_i^2) \quad (2 \le i \le n-1)$$

と作用する([D][Ih-M]). これによって

$$y_i \to y_i^{\lambda}, \quad \omega_n \to \omega_n^{\lambda}; \quad (2 \le i \le n)$$ だから,

この作用は, $\hat{B}_n^*$, $\hat{P}_n^*$ への作用を引起し, とくに $\hat{P}_4^*$, $\hat{P}_5^*$ に作用する。 $\hat{P}_4^*$ への作用が $\hat{F}_2$ へのもとの作用であり, これが $\hat{P}_5^*$ への作用に延びることを用いて定理の等式を示すのである.

まず $\hat{P}_4^* = \hat{F}_2 = \langle x, y \rangle$; $x_{12}^* = x_{34}^* = x$, $x_{23}^* = x_{14}^* = y$, $x_{13}^* = x_{24}^* = z$ $(xyz = 1)$

次の完全系列を考える.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \hat{F}_3 & & \hat{P} & & \hat{F}_2 \\
 & & \wr\wr & & \| \text{ とおく} & & \| \\
1 & \to & N & \to & \hat{P}_5^* & \to & \hat{P}_4^* \to 1 \\
 & & \| & & & & \\
 & & \langle x_{15}^*, x_{25}^*, x_{35}^*, x_{45}^* \rangle & & & &
\end{array}$$

$$x_{15}^* = t_1, \quad x_{25}^* = t_2, \quad x_{35}^* = t_3, \quad x_{45}^* = t_4$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$$

GT の $\hat{P}_5^* / \hat{P}_5^{*\prime\prime}$ への作用を考えたのでは ダメ(それで暫く うまくいかなかった).

N'/N'' への作用を考える.

さて GT の任意の元 $\sigma=(\lambda, f)$ をとり, 簡単の為 $\lambda=1$ とする. N への作用は

$$t_4 \to t_4, \qquad t_3 \to f(t_4, t_3)^{-1} t_3 f(t_4, t_3),$$
$$t_2 \to g t_2 g^{-1}, \quad t_1 \to g f(t_2, t_1)^{-1} t_1 f(t_2, t_1) g^{-1},$$

ただし $\quad g = f(t_1 t_2, t_4) f(t_2, x_{12}^*) \in (N, P) = (N, N).$

σ は $N/N' \cong \hat{\mathbb{Z}}^3$ に自明に作用する. $\mathcal{L} = \hat{\mathbb{Z}}[[N/N']]$ とおくと, σ は N'/N'' に $\mathcal{L}$-加群としての自己同型として作用する. $\mathcal{L}$ の全商環を K とおくと, $V := N'/N'' \otimes K$ は K 上階数 2 の free module で, $\overline{(t_2, t_1)}, \overline{(t_4, t_3)}$ を底にもつ. これらの元への σ の作用は

$$\sigma\overline{(t_2, t_1)} = \alpha_\sigma \overline{(t_2, t_1)}, \quad \sigma\overline{(t_4, t_3)} = \beta_\sigma \overline{(t_4, t_3)},$$

ここで $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathrm{Fct}\{\{(t_1,t_2,t_3,t_4) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^4;\ \sum_i t_i = 0\},\ \hat{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}_{ab}\}$ と見るとき,

$$\alpha_\sigma = B_\sigma(t_2, t_1), \quad \beta_\sigma = B_\sigma(t_4, t_3) \in \mathcal{L}.$$

ところが, 以下に見るように, $\det(\sigma|_V) = \alpha_\sigma \beta_\sigma \in \mathcal{L}$ は S_4-対称. 即ち $B_\sigma(t_2, t_1) B_\sigma(t_4, t_3)$ は $t_1+t_2+t_3+t_4=0$ の上で S_4-対称. これが (Prop の上の) Th と同値.

[$\det(\sigma|_V)$ の S_4-対称性の理由]

(i) $\quad (GT)_{\lambda=1} \curvearrowright B_5^*/(P_5^*)'$ は自明な作用である.

(ii) P_5^* への B_5^* (の元による) conjugation の作用と $(GT)_{\lambda=1}$ の元による作用は，mod $\mathrm{Int}(P_5^{*\prime})$ で互いに可換.

(iii) $(\wp, N) = N'$.

これら (i)〜(iii) より，$\mathrm{Int}\, P$ は N/N' に自明に作用し，従って V には K-linear に作用．よって $\mathrm{Int}\, P'$ の V への作用の determinant $= 1$.

[文献]

[A] G. W. Anderson, The hyperadelic gamma function, Inv. math 95 (1989), 63-131

[D] V. G. Drinfeld, On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and some group closely associated with Gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$). Algebra i Analiz 2(1990) 114-148.
英訳 Leningrad Math J. 2 (1991), 829-860.

[Ic-K] H. Ichimura, M. Kaneko, On the universal power series for Jacobi sums and the Vandiver conjecture, J. Number Theory 31 (1989), 312-334

[Ih] Y. Ihara. Braids, Galois groups and some arithmetic functions, Proc ICM, Kyoto 1990, Vol 1, 99-120

[Ih-M] Y. Ihara, M. Matsumoto, On Galois actions on profinite completions of braid groups, Contemp. Math 186 (1993), 173-200